Задание необходимо выполнить в срок до 23.03.2020 и выслать в электронном виде на e-mail: uor_ovr@mail.ru

ФИО обучающегося____

Группа ___________________

Дата занятия: 20.03.2020

Тема занятия: Экстремумы функции

Что необходимо сделать:

1. Составить конспект по параграфу # 50 «Экстремумы функции» (страницы 261 - 265)
2. Разобрать задачу № 1 (на странице 264) и задачу № 2 (на странице 265)
3. Выполнить задания в тетради по математике № 912 (2); № 913 (2); № 914 (2); № 915 (2)

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $x < 0$, $x > 2$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $0 < x < 2$. ◁

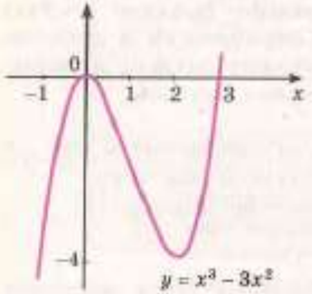

Рис. 123

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображен на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $x < 0$ и $x > 2$, но и на промежутках $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; убывает не только на интервале $0 < x < 2$, но и на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

900 Найти интервалы возрастания и убывания функции:
1) $y = x^2 - x$; 2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x$; 4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$; 8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

901 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:
1) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < 5$, $f(1) = 0$, $f(5) = 3$;
2) $a = -1$, $b = 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = -4$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (902—905).

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2+3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

906 Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:
1) $a = -2$, $b = 6$, $f(-2) = -1$, $f(6) = 5$, $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ при $-2 < x < 3$, $f'(x) < 0$ при $3 < x < 6$;
2) $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = -1$, $f(3) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

907 При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:
1) $y = x^3 - ax$; 2) $y = ax - \sin x$?

908 При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

909 При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

§ 50 Экстремумы функции

На рисунке 123 изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше ее значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1,5; 2,5)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

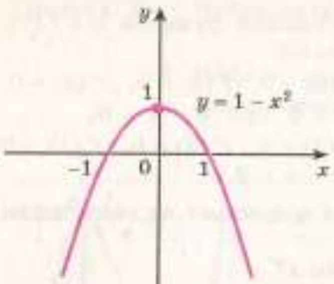

Рис. 124

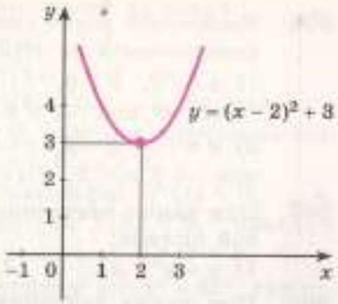

Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма*[1]. Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 126).

[1] Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик, один из основоположников теории чисел и математического анализа.

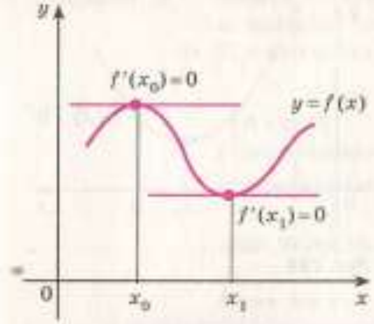

Рис. 126

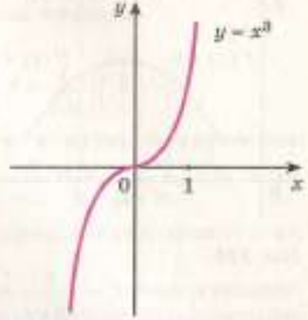

Рис. 127

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 124) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, ее производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. Функция $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 125), $f'(x) = 2(x - 2)$, $f'(2) = 0$.

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 127).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными.*

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ — точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует (см. § 44). Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют *критическими точками этой функции.*

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Приведем *достаточные условия* того, что стационарная точка является точкой экстремума, т. е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

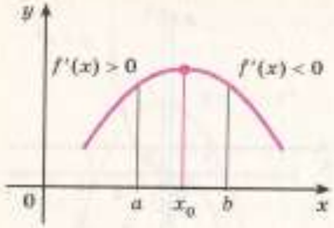

Рис. 128

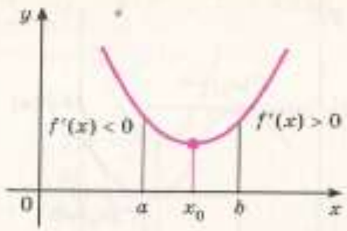

Рис. 129

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:
1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);
2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться формулой Лагранжа на отрезках $[x; x_0]$, где $a < x < x_0$, и $[x_0; x]$, где $x_0 < x < b$.

Задача 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

▶ Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Найдем стационарные точки:

$$4x^2(x - 3) = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 3.$$

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.
Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.
При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «–» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ — точка минимума. ◁

Задача 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значение функции в этих точках.

▶ Производная равна

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «–». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «–» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума. Значение функции в точке максимума равно $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. ◁

Упражнения

910 На рисунке 130 изображен график функции $y = f(x)$. Найти точки максимума и минимума этой функции.

911 На рисунке 131 изображен график функции $y = f(x)$. Найти критические точки этой функции.

912 Найти стационарные точки функции:
1) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$;
2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;
3) $y = e^{2x} - 2e^x$;
4) $y = \sin x - \cos x$.

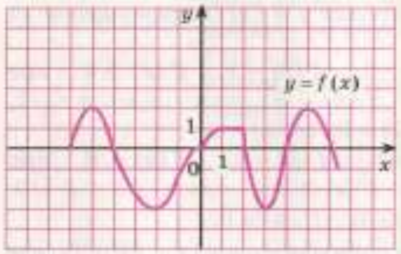

Рис. 130

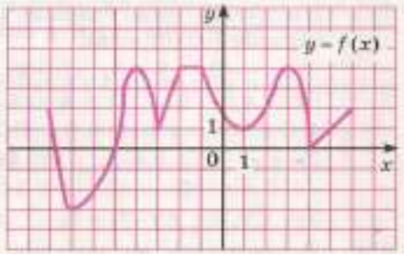

Рис. 131

913 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{2 + x^2}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 + 3}{2x}$; 3) $y = e^{x^2 - 1}$; 4) $y = 2^{x^2 - x}$.

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = 2\cos x + x$.

916 Имеет ли точки экстремума функция:

1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 5x$; 3) $y = x^3 + 2x$; 4) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$?

917 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -1$, $b = 7$, $f(-1) = 0$, $f(7) = -2$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $4 < x < 7$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -5$, $b = 4$, $f(-5) = 1$, $f(4) = -3$, $f'(x) < 0$ при $-5 < x < -1$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(-1) = 0$.

918 Найти критические точки функции:

1) $y = \sqrt{2 - 3x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$;

3) $y = |x - 1|$; 4) $y = x^2 - |x| - 2$.

919 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 2) $y = (x - 1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y = x - \sin 2x$; 4) $y = \cos 3x - 3x$.

920 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = \frac{(2 - x)^3}{(3 - x)^2}$; 2) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$; 3) $y = (x - 1)e^{3x}$;

4) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$; 5) $y = e^{\sqrt{3 - x^2}}$; 6) $y = \sqrt{e^x - x}$.

921 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -6$, $b = 6$, $f(-6) = -6$, $f(6) = 1$, $f'(x) > 0$ при $-6 < x < -4$, $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -1$, $4 < x < 6$, $f'(-4) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -4$, $b = 5$, $f(-4) = 5$, $f(5) = 1$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -3$, $0 < x < 3$, $f'(x) > 0$ при $-3 < x < 0$, $3 < x < 5$, $f'(-3) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(3) = 0$.

922 Исследовать на экстремум функцию $y = (x + 1)^n e^{-x}$, где n — натуральное число.